السّؤال الأوّل: (25 درجة):

ليكن $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ تابعاً معرّفاً على النحو الآتي:

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$$

أثبت أنّ هذا التابع تقابل, ثمّ أوجد تقابله العكسيّ.

نحل المعادلة $y=f(x)$ فنجد: $$y=\frac{3x+1}{x-2}\Rightarrow yx-2y=3x+1$$ نعزل x فنجد: $$yx-3x=2y+1\ \Rightarrow\ x(y-3)=2y+1$$	10 درجات
بما أنّ: $y\neq 3$ يكون: $x=\frac{2y+1}{y-3}$ وهذا الحل وحيد, إذاً التابع f تقابل.	10 درجات
التقابل العكسي: $$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$$ $$x\mapsto f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}$$	5 درجات

السّؤال الثاني: (25 درجة):

ليكن f تابعاً معرّفاً بالشكل الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{x}+2x+1 & ;\quad x<0\\ \dfrac{e^x+3}{x+2}+1 & ;\quad x\geq 0\end{cases}$$

اثبت أنّ التابع f مستمر عند $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x+3}{x+2}+1\right)=\frac{1+3}{0+2}+1=3$$	8 درجات
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2\sin x}{x}+2x+1\right)=2+1=3$$	8 درجات
$$f(0)=3$$	4 درجات

مدرس المقرر
د. باسل العرنوس

عميد الكلية
د. نورس الهلامي

بما أنّ: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ فإنّ التابع f مستمر عند $x = 0$.	5 درجات

السّؤال الثالث: (25 درجة):

أوجد مشتق كل من التّوابع الآتية:

$$f(x) = x.\ln x \quad , \quad f(x) = \left(5x^4 + \arctan x\right)^2 \quad , \quad f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

بالنسبة للتابع $f(x) = x.\ln x$ $$f'(x) = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1$$	8 درجات
بالنسبة للتابع: $f(x) = \left(5x^4 + \arctan x\right)^2$, نكتب: $$f(x) = 2\left(5x^4 + \arctan x\right)'\left(5x^4 + \arctan x\right)$$ $$= 2\left(20x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)\left(5x^4 + \arctan x\right)$$	8 درجات
بالنسبة للتابع $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ نضع $y = x^{\sqrt{x}}$ ونأخذ لوغاريتم الطرفين: $$\ln y = \sqrt{x}\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$ وبالتالي: $$y' = \left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right).y = \left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right).x^{\sqrt{x}}$$	9 درجات

السّؤال الرابع: (25 درجة):

ليكن لدينا التابع:

$$f(x,y) = x^4y^3 - 5e^x.\sin x + 4\ln y$$

١. أوجد المشتقات الجزئيّة من المرتبة الأولى.

٢. اكتب عبارة التفاضل الكلّي لـ f .

٣. أوجد المشتقّات الجزئيّة من المرتبة الثانية الآتية: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3 - 5e^x.\sin x - 5e^x.\cos x$$	5 درجات

5 درجات	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^2 + \frac{4}{y}$
5 درجات	$df = f_x dx + f_y dy =$ $= \left(4x^3y^3 - 5e^x.\sin x - 5e^x.\cos x\right).dx + \left(3x^4y^2 + \frac{4}{y}\right).dy$
5 درجات	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y^3 - 10e^x.\cos x$
5 درجات	$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 12x^3y^2$

انتهى السلّم